Lisbon School of Economics & Management

Universidade de Lisboa

Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto

2.º Ano/2.º Semestre

2023/2024

Aulas Teórico-Práticas N.os 17 e 18 (Semana 10)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 5)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Revisões e Distribuições de Amostragem	• **Capítulo 2**: Estimação	• **Capítulo 3**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 4**: Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

1

Hipóteses Compostas, Estatística de Teste e Decisão

8.6 Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor esperado μ e desvio padrão σ. A partir de uma amostra de dimensão 30 dessa variável obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 64.0 \qquad \sum_{i=1}^{30} (x_i - \overline{x})^2 = 84.8$$

Teste ao nível de significância de 5% a hipótese $H_0 : \mu = 2.0$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \mu > 2.0$.

Exercício 8.6: Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Hipóteses:

Passo 0.1

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu, \sigma^2 = ?$

$H_0: \mu = 2.0$

$H_1: \mu > 2.0$

$\alpha = 5\%$

Slides Professora Claúdia Nunes

Tipos de Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Um **teste de hipóteses paramétrico** para o parâmetro μ (valor médio ou média populacional) pode ser:

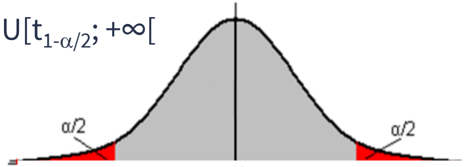
Teste

- Bilateral

  $H_0: \mu = \mu_0$

  $H_1: \mu \neq \mu_0$

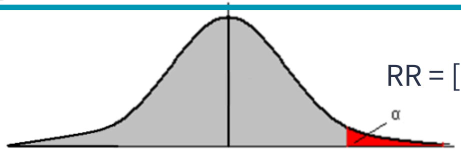
  $RR = \,]-\infty; -t_{1-\alpha/2}] \cup [t_{1-\alpha/2}; +\infty[$



- Unilateral
  - à direita

    $H_0: \mu \leq \mu_0$

    $H_1: \mu > \mu_0$



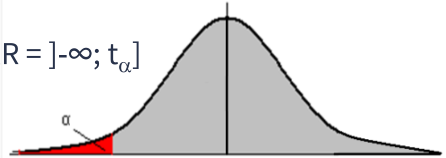
    $RR = [t_{1-\alpha}; +\infty[$

  - à esquerda

    $H_0: \mu \geq \mu_0$

    $H_1: \mu < \mu_0$

    $RR = \,]-\infty; t_{\alpha}]$



onde μ_0 é o valor numérico específico considerado em H_0 e H_1.

Exercício 8.6: Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Estatística de Teste:

Passo 2: v. aleat e est. Teste

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(29)}$$

$$T_0 = \frac{\bar{X} - 2}{S/\sqrt{30}} \overset{H_0}{\sim} t_{(29)}$$

$$t_0 = \frac{2.13 - 2}{\sqrt{2.92/30}} = 0.417$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 64.0 \qquad \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 = 84.8$$

$$\bar{x} = \frac{64}{30} = 2.13$$

$$s^2 = \frac{84.8}{29} = 2.92$$

IC para μ: Formulário

Variância corrigida

$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

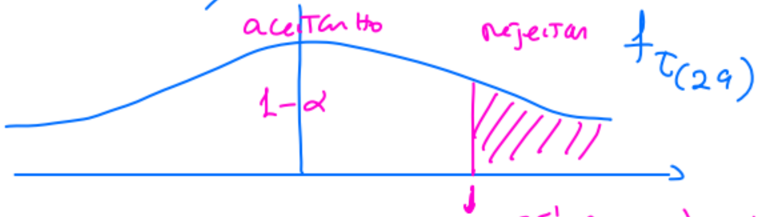
Média	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)}$
Diferença de médias	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$ $T = \frac{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m}+\frac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r = \frac{\left(\frac{s_1'^2}{m}+\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\left(\frac{s_1'^2}{m}\right)^2+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
Variância	$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

Exercício 8.6: Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Desconhecida)

Decisão (pela região de rejeição):

Região de rejeição RR = [1,699; +∞[

Passo 3: R. rejeição



$$a = F^{-1}_{t(29)}(0.95) = 1.699$$

Passo 4: Decisão $t_0 = 0.417 < 1.699$, então não há evidências para rejeitar Ho para $\alpha = 5\%$.

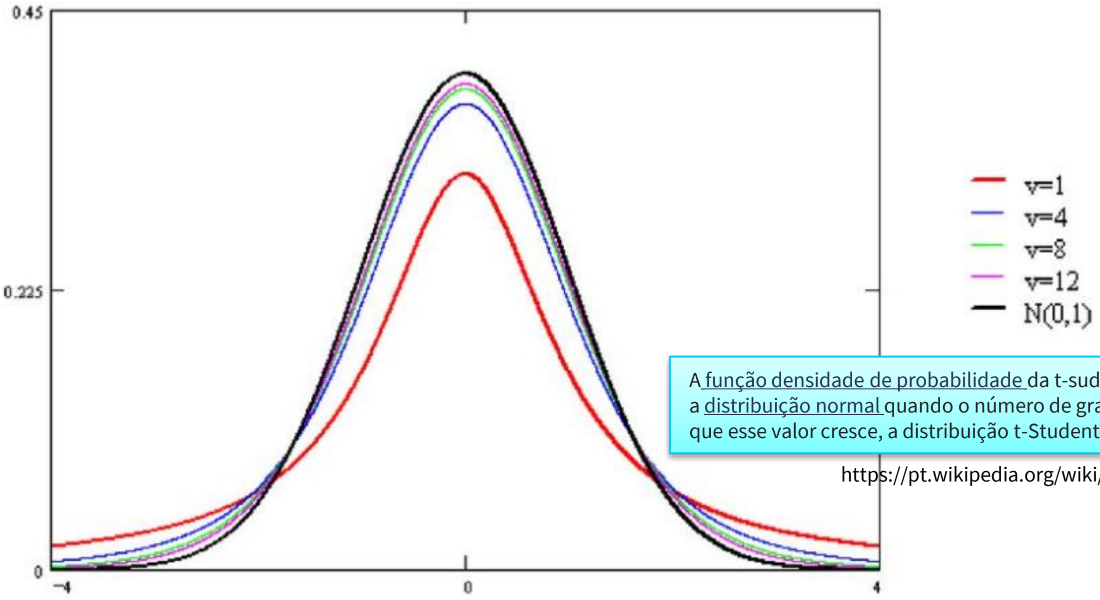
Decisão pela região de rejeição:
Não se rejeita H_0 para $\alpha = 5\%$, pois 0,417 < 1,699.
Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é superior a 2 para $\alpha = 5\%$.

Não se rejeita H_0 $(0.427 < 1.699)$

T-Student

Curiosidade

- Se a **variável tem distribuição Normal na população**, ou a amostra é suficientemente grande, mas não conhecemos o desvio da população, só da amostra, então ...
- ... A média amostral se distribui conforme uma **t-Student**
- **...** A distribuição t-Student depende dos graus de liberdade (n-1), que denotamos por v



A função densidade de probabilidade da t-sudent detém caudas mais pesadas que a distribuição normal quando o número de graus de liberdade é pequeno e à medida que esse valor cresce, a distribuição t-Student aproxima-se da normal.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_t_de_Student

https://slideplayer.com.br/slide/14561961

Decisão: Região de Rejeição vs Valor-p

Nota: Supondo que a estatística de teste tem distribuição t-student.

Região de rejeição (RR) ou Região crítica (RC): Conjunto para o qual H_0 é rejeitada

- Teste unilateral à esquerda: $RR =]-\infty; t_\alpha]$
- Teste unilateral à direita: $RR = [t_{1-\alpha}; +\infty[$
- Teste bilateral: $RR =]-\infty; -t_{1-\alpha/2}] \cup [t_{1-\alpha/2}; +\infty[$

$\Leftrightarrow$

Regra (considerando os valores críticos):

- $t_0 \leq t_\alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $t_0 \geq t_{1-\alpha} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $|t_0| \geq t_{1-\alpha/2} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Regra: $t_0 \in RR \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Valor-p ou P-value: Probabilidade sob H_0 de a estatística de teste tomar valores tão ou mais desfavoráveis a H_0 do que o seu valor observado

- Teste unilateral à esquerda: valor-p $= P(T \leq t_0)$
- Teste unilateral à direita: valor-p $= P(T \geq t_0)$
- Teste bilateral: valor-p $= P(T \leq -t_0 \text{ ou } T \geq t_0) = 2 \times P(T \geq |t_0|)$

Regra: Valor-p $< \alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

?

RR = $[t_{1-\alpha}; +\infty[$

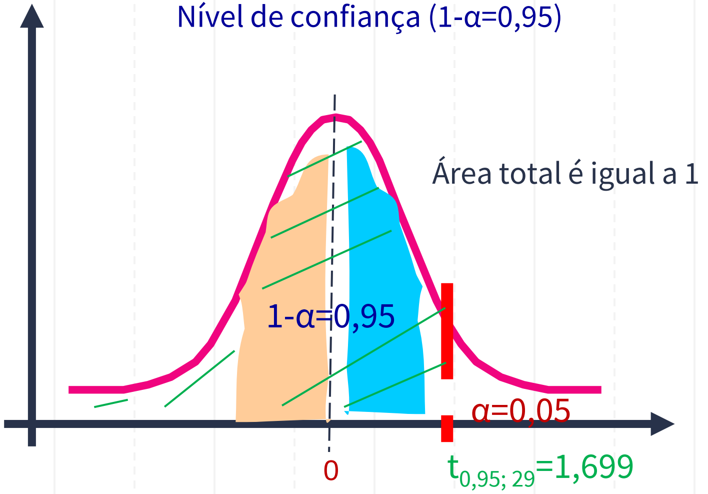
Cálculo do Quantil da Distribuição t-student de Probabilidade 1-α/2 e com n-1 g.l.´s

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385

Nível de significância (α=0,05)

Nível de confiança (1-α=0,95)



O nível de significância é igual a α = 0,05 e n-1 = 29 g.l.´s, então tem-se $t_{1-\alpha;n-1} = t_{0,95;\,29} = 1{,}699$

Teste unilateral à direita: valor-p = P(T ≥ t_0)

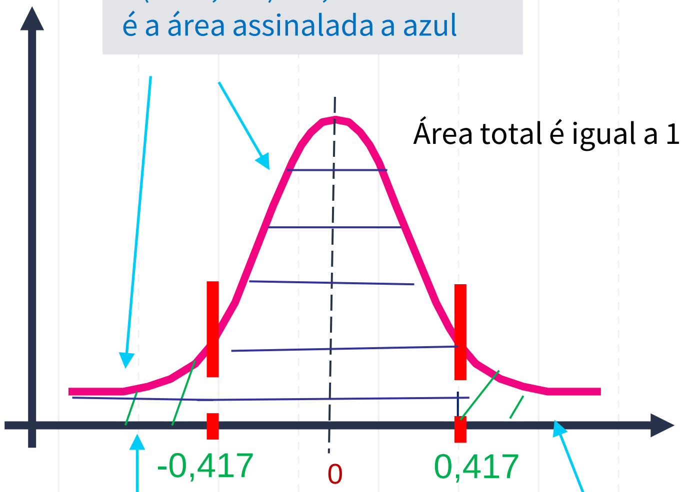
Cálculo do valor-p quando a Estatística de Teste tem Distribuição t-student com n-1 g.l.´s

Decisão (pelo valor-p):

valor-p = P(T ≥ 0,417) ~ P(T ≥ 0,256) = 0,4

Decisão pelo valor-p: Valor-p = 0,4 > 0,05 Não se rejeita H_0 para α = 5%. Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é superior a 2 para α = 5%.

P(T ≤ 0,417) ~ 0,7
é a área assinalada a azul



	0,4
29	0,256

P(T ≤ -0,417) = P(T ≥ 0,417) ~ 0,4
é a área assinalada a verde

Testes de Hipóteses para μ: Resumo...

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

2

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

Método Geral

$\boxed{\text{Passo 0}}$

$$X \begin{cases} \to N(\mu, \sigma^2) \begin{cases} \to \mu \text{ desconhecido, } \sigma^2 \text{ conhecido} & (1) \\ \to \mu \text{ e } \sigma^2 \text{ desconh.} & (2) \end{cases} \\ \to \text{Bernoulli}(p) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Passo 1}}$

Indicar H_0 e H_1 e nível de significância α

θ = parâmetro a testar (μ, σ ou p, consoante o caso)

(a) $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

Passo 2

Com a informação do passo 0, vamos indicar a v. fulcral / estatística de teste

(mesmos critérios que demos p/ os intervalos de confiança)

1	2, p/ μ		
$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
2, p/ σ^2: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$		$\sum_{i=1}^{k}\dfrac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi^2_{(k-m-1)}$	

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

Passo 3

Com o nível de significância α e a forma da região de rejeição (ⓐ, ⓑ ou ⓒ), vamos construir a região de rejeição, usando a distribuição da v. plural

ⓐ → Zona de rejeição bilateral

ⓑ → Zona de rejeição unilateral, à esquerda

ⓒ → Zona de rejeição unilateral, à direita

De qq forma α = área da zona de rejeição

Passos Fundamentais para a Construção de um Teste de Hipóteses

$\boxed{\text{Passo 4}}$ verificar se o valor observado da estatística de teste está ou ñ na região de rejeição.

Construção de um Teste de Hipóteses: Exemplo 1

① $X \sim N(\mu, 2^2)$

passo 0 | $n = 4$; $\alpha = 5\%$; $\bar{x} = 6$

Hipóteses:

passo 1 | $H_0: \mu = 5$

$H_1: \mu \neq 5$

Estatística de Teste:

v. fulcral $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ (fundamental)

passo 2 | Est. Teste $Z_0 = \dfrac{\bar{X} - 5}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$

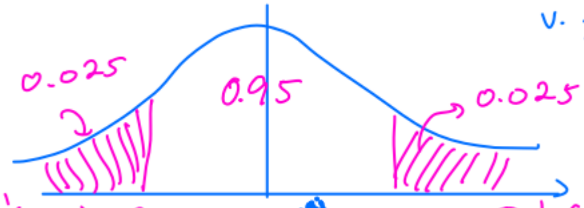
valor obs. est teste: $z_0 = \dfrac{6-5}{1} = 1$

[valor obs estatística de teste é um nº e por isso não tem distribuição]

Construção de um Teste de Hipóteses: Exemplo 1

Decisão (pela região de rejeição):

v. fulcral $\sim N(0,1)$



$-1.96 = \Phi^{-1}(0.025) = ?$ $\quad$ $? \Rightarrow \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$

Passo 3

$z_0 = 1 \ldots$

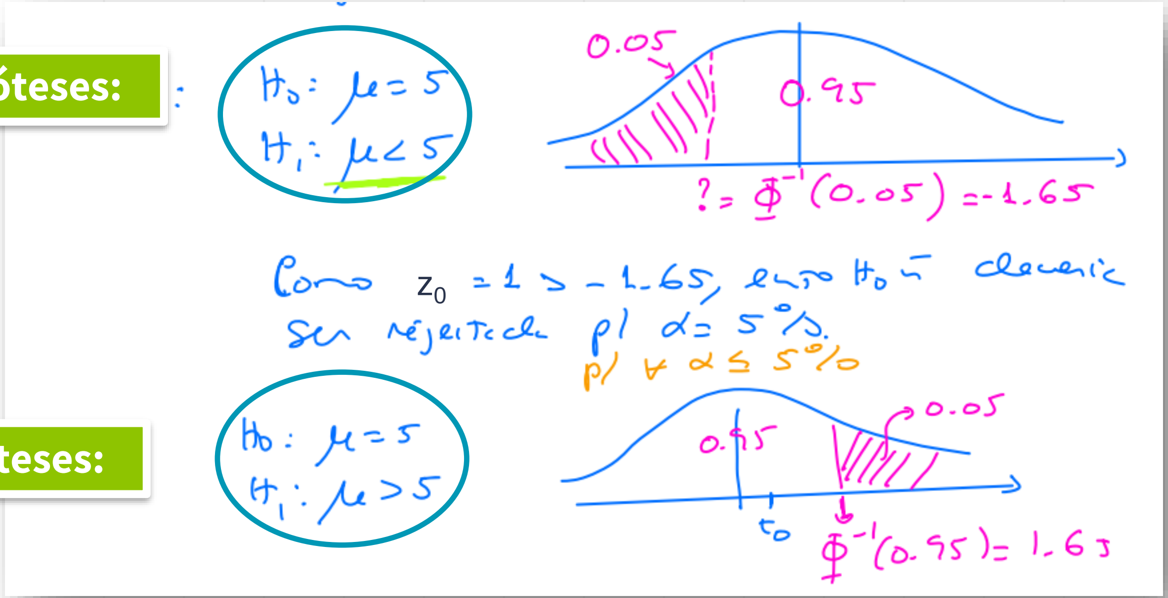
Como $|z_0| < 1.96$, ie, z_0 ñ pertence à região de rejeição, então p/ $\alpha = 5\%$, H_0 ñ deve ser rejeitada.

Decisão:
Não se rejeita H0 para $\alpha = 5\%$, pois $|1| < 1{,}96$. Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é diferente de 5 para $\alpha = 5\%$.

Construção de um Teste de Hipóteses: Exemplos 2 e 3

Hipóteses:

Hipóteses:



Testes de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão (Amostras Independentes)

3

Teste t para a Diferença de Valores Médios (2 Amostras Independentes)

O **teste t para 2 amostras independentes** também é conhecido como teste *t* não-emparelhado

- Permite a **comparação de dois valores médios** usando amostras representativas de duas populações independentes.
- Os indivíduos são escolhidos **aleatoriamente** da população.
- As duas amostras são **independentes**.
- Deve-se saber se as **variâncias** são aproximadamente **iguais** (homocedasticidade) ou **não** (heterocedasticidade).
- **Suposição deste teste é**: A variável de interesse deve ter distribuição **Normal** em cada uma das populações (das quais as amostras foram recolhidas).

Nota: Geralmente, as variâncias são desconhecidas, mas também existem testes de hipóteses para o caso das variâncias serem conhecidas.

IC para μ_1-μ_2: Formulário

Variância corrigida

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\frac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$ Variâncias Conhecidas	$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m}+\frac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r=\frac{\left(\frac{s_1'^2}{m}+\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\left(\frac{s_1'^2}{m}\right)^2+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
Variâncias Desconhecidas e Iguais	$T=\frac{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	Variâncias Desconhecidas e Diferentes
Variância	$\frac{nS^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

IC para μ_1-μ_2: Formulário

- **GRANDES AMOSTRAS**

Caso geral

Média	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Variâncias Conhecidas

Variâncias Desconhecidas

Estatísticas de Teste t para a Diferença de Valores Médios (2 Amostras Independentes)

- **Variâncias iguais e desconhecidas:**

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

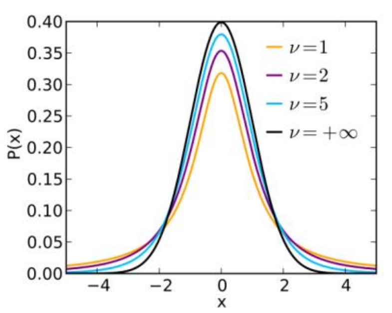
s: desvio padrão conjunto

- **Variâncias diferentes e desconhecidas:**

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$\nu = \frac{[(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)]^2}{[(s_1^2/n_1)^2/(n_1-1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2-1)]}$$

Nota: Esta variável T tem distribuição t-Student com v graus de liberdade (g.l.´s). O valor dos g.l.´s é calculado através desta fórmula, sendo arredondado para baixo para o inteiro mais próximo.



Nos primeiros 6 meses de vida dois grupos aleatórios de crianças seguiram esquemas de alimentação diferentes: o grupo 1 seguiu o esquema A e o grupo 2 seguiu o esquema B. No quadro seguinte apresentam-se os ganhos em peso, em kg, dessas crianças.

Grupo 1	2,7	3,2	3,6	4,1	2,7	3,2	4,5	3,6	2,7
Grupo 2	4,1	4,5	3,6	2,7	3,6	3,2	4,1		

Sabe-se que as crianças dos dois grupos tinham, ao nascer, aproximadamente pesos iguais.
Admita que as distribuições dos pesos seguem a distribuição Normal com variâncias 0,36 e 0,32, respectivamente.

a) Ao nível de significância de 1%, poderá afirmar que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A é:
    i. Igual ao das crianças alimentadas segundo o esquema B?
    ii. Superior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B?
    iii. Inferior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B?

b) A partir de que nível de significância rejeita cada uma das hipóteses anteriores?

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Conhecidas)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa o ganho em peso, em kg, das crianças alimentadas segundo o esquema A,
- X_2 a v.a. que representa o ganho em peso, em kg, das crianças alimentadas segundo o esquema B,

com $X_1 \sim N\left(\mu_1 =?\,; \sigma_1 = \sqrt{0,36}\right)$ e $X_2 \sim N\left(\mu_2 = ?; \sigma_2 = \sqrt{0,32}\right)$.

$n_1 = 9, \qquad \overline{x}_1 = 3,3367;$
$n_2 = 7, \qquad \overline{x}_2 = 3,6857.$

a) $\alpha = 1\%$.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Conhecidas)

Hipóteses:

Estatística de Teste:

Decisão (pela região de rejeição):

i) $\mu_1 = \mu_2$?

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \; vs \; H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral).

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0; 1).$$

$$z_{obs} = \frac{(3{,}3667 - 3{,}6857) - 0}{\sqrt{\frac{0{,}36}{9} + \frac{0{,}32}{7}}} = -1{,}0896.$$

Pela tabela $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}995} = 2{,}576$.

Logo, $R.A.:]-2{,}576;\ 2{,}576[$ e $R.R.:]-\infty;\ -2{,}576] \cup [2{,}576; +\infty[$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja diferente do das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (ii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

ii) $\mu_1 > \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \; vs. H_1: \mu_1 > \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \; vs. H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ (teste unilateral direito).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0; 1).$$

Decisão (pela região de rejeição):

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $z_{obs} = -1{,}0896$.

Pela tabela $z_{1-\alpha} = z_{0{,}99} = 2{,}326$. Logo, $R.A.:]-\infty; \; 2{,}326[$ e $R.R.: [2{,}326; +\infty[$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja superior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (iii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

Hipóteses:

iii) $\mu_1 < \mu_2$?

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 < \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ (teste unilateral esquerdo).

Estatística de Teste:

Estatística de teste: $Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1)$.

Decisão (pela região de rejeição):

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $z_{obs} = -1{,}0896$.

Pela tabela $z_{1-\alpha} = z_{0{,}99} = 2{,}326$. Logo, $R.A.:]-2{,}326; +\infty[$ e $R.R.:]-\infty; -2{,}326]$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja inferior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b) (i) e (ii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

b) valor $p = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) = P(Z_{obs} \in R.R. | \mu = \mu_0)$.

i) valor $p = 2 \times P(Z \geq |z_{obs}|) = 2 \times P(Z \geq 1{,}0896) = 2 \times (1 - \Phi(1{,}0896))$
$= 2 \times (1 - 0{,}8621) = 0{,}2758$.

Decisão (pela valor-p):

A hipótese $H_0: \mu_1 = \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 27,58%, logo não é rejeitada para qualquer nível de significância usual em investigação: não existe evidência estatística de que o ganho médio de peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja diferente do das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ii) valor $p = P(Z \geq z_{obs}) = P(Z \geq -1{,}0896) = 1 - \Phi(-1{,}0896)$
$= 1 - (1 - \Phi(1{,}0896)) = \Phi(1{,}0896) = 0{,}8621$.

Decisão (pela valor-p):

Alternativa, com base no valor p bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 3{,}3367 - 3{,}6857 > 0$ dá uma proposição falsa. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = 1 - \frac{0{,}2758}{2} = 0{,}8621.$$

A hipótese $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 86,21%. Assim, não existe evidência estatística de que o ganho médio de peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja superior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b) (iii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

Decisão (pela valor-p):

iii) $valor\ p = P(Z \leq z_{obs}) = P(Z \leq -1{,}0896) = \Phi(-1{,}0896) = 1 - \Phi(1{,}0896)$
$= 1 - 0{,}8621 = 0{,}1379.$

Alternativa, com base no valor p bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 3{,}3367 - 3{,}6857 > 0$ dá uma proposição verdadeira. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = \frac{0{,}2758}{2} = 0{,}1379.$$

A hipótese H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 13,79%: não existe evidência estatística de que o ganho médio de peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja inferior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Testes de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

4

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão (Amostras Independentes)

Um determinado método de análise permite determinar o conteúdo de enxofre no petróleo bruto. Os ensaios efectuados em 10 e 8 amostras aleatórias de 1 kg de petróleo bruto, provenientes de furos pertencentes respectivamente aos campos A e B, revelaram os seguintes resultados (em gramas):

Campo A:	111	114	105	112	107	109	112	110	110	106
Campo B:	109	103	101	105	106	108	110	104		

a) Ao nível de significância de 10%, poderá afirmar que, em média, quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A é:
   i. Igual à do campo B?
   ii. Superior à do campo B?
   iii. Inferior à do campo B?

b) Calcule o *valor p* associado a cada um dos testes anteriores.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A,
- X_2 a v.a. que representa a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo B.

Nada é referido sobre a distribuição de X_1 e X_2.

$n_1 = 10, \quad \bar{x}_1 = 109{,}6 \quad \text{e} \quad s_1 = 2{,}875,$
$n_2 = 8, \quad \bar{x}_2 = 105{,}75 \quad \text{e} \quad s_2 = 3{,}105.$

a) $\alpha = 10\%$.

i) $\mu_1 = \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ } vs \text{ } H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \text{ } vs \text{ } H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral).

Para saber decidir qual a estatística de teste a utilizar, é preciso validar os pressupostos subjacentes:

- Normalidade:

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

- Igualdade das variâncias:

O I. C. a 90% para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ é dado por:

$$\left]\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1;n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{n_2-1;n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right[.$$

Ver Tabela no Slide a seguir

Substituindo os valores, sendo $F_{9;\,7;0{,}95} = 3{,}68$ e $F_{7;\,9;0{,}95} = 3{,}29$, obtém-se:

$$\left]\frac{2{,}875^2}{3{,}105^2}\times\frac{1}{3{,}68};\frac{2{,}875^2}{3{,}105^2}\times 3{,}29\right[=]0{,}2332;2{,}8230[.$$

Como 1 pertence ao intervalo obtido, ao nível de significância de 10% não há evidências de que σ_1^2 seja diferente de σ_2^2. Portanto, pode-se considerar que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Cálculo do Quantil da Distribuição F-Snedecor de Probabilidade 1-α/2 e com n1 e n2 g.l.´s

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

$F_{9;\,7;0,95} = 3{,}68$ e $F_{7;\,9;0,95} = 3{,}29$,

n – graus de liberdade do denominador		m - graus de liberdade do numerador																		
	ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.95	248.02	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.32
	.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	976.72	984.87	993.08	997.27	1001.40	1005.60	1009.79	1014.04	1018.26
	.010	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6106.68	6156.97	6208.66	6234.27	6260.35	6286.43	6312.97	6339.51	6365.59
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
	.010	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.41	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Estatística de Teste:

Deste modo, a estatística de teste a usar é:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2=10+8-2=16}.$$

$$t_{obs} = \frac{(109{,}6 - 105{,}75) - 0}{\sqrt{\frac{(10-1)2{,}875 + (8-1)3{,}105}{10+8-2}}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}} = 2{,}7255.$$

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n_1+n_2-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{16\,;\,0{,}95} = 1{,}746$.

Logo, $R.A.:\,]-1{,}746;\ 1{,}746[$ e $R.R.:\,]-\infty;\ -1{,}746] \cup [1{,}746; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 10%, existe evidência estatística de que, em média, a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A é diferente da do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (ii): Teste de Hipóteses para μ1 - μ2 (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

ii) $\mu_1 > \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \; vs \; H_1: \mu_1 > \mu_2$

$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ (teste unilateral direito).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2=10+8-2=16}.$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 2{,}7255$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n_1+n_2-2;\,1-\alpha} = t_{16;\,0{,}90} = 1{,}337$.

Logo, $R.A.:]-\infty;\; 1{,}337[$ e $R.R.: [1{,}337; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 10%, existe evidência estatística de que, em média, a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A é superior à do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (iii): Teste de Hipóteses para μ1 - μ2 (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Hipóteses:

iii) $\mu_1 < \mu_2$?

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 < \mu_2$

$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ (teste unilateral esquerdo).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2=10+8-2=16}.$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 2{,}7255$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n_1+n_2-2;\,1-\alpha} = t_{16\,;\,0{,}90} = 1{,}337$.

Logo, $R.A.:]-1{,}337; +\infty[$ e $R.R.:]-\infty;\ -1{,}337]$.

Como $t_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 10%, não existe evidência estatística de que, em média, a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A seja inferior à do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Decisão (pela valor-p):

b) valor $p = P(\text{Rejeitar } H_0|H_0 \text{ é verdadeira}) = P(Z_{obs} \in R.R.|\mu = \mu_0)$.

i) valor $p = 2 \times P(T \geq |t_{obs}|) = 2 \times P(T \geq 2{,}7255) = 2 \times (1 - P(T < 2{,}7255))$
$= 2 \times (1 - 0{,}9925) = 0{,}015$.

A hipótese $H_0: \mu_1 = \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 1,5%. Logo, para um nível de significância de 5% existe evidência de que o teor médio de enxofre no campo A é diferente do campo B, mas para 1% essa afirmação já não pode ser sustentada. Repare-se que o *valor p* calculado é o valor indicado no quadro de resultados do SPSS anteriormente apresentado.

ii) valor $p = P(T \geq t_{obs}) = P(T \geq 2{,}7255) = 1 - P(T < 2{,}7255) = 1 - 0{,}9925 = 0{,}0075$.
Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 109{,}6 - 105{,}75 > 0$ dá uma proposição verdadeira. Logo,

$$valor\text{-}p_{uni} = \frac{0{,}015}{2} = 0{,}0075.$$

A hipótese $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 0,75%. Assim, para qualquer nível de significância sensato/usual ($\leq 10\%$) existe evidência de que o teor médio de enxofre no campo A é superior ao do campo B.

iii) valor $p = P(T \leq t_{obs}) = P(T \leq 2{,}7255) = 0{,}9925$.
Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 109{,}6 - 105{,}75 > 0$ dá uma proposição falsa. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = 1 - \frac{0{,}015}{2} = 0{,}9925.$$

A hipótese $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 99,25. Assim, existe não existe evidência de que o teor médio de enxofre no campo A seja inferior ao do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Testes de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

5

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão
(Amostras Independentes)

Para um estudo sobre a caracterização da altura da população portuguesa, foi recolhida uma amostra de 1861 pessoas, com as seguintes características: (conjunto de dados semelhante ao disponibilizado no Capítulo 12, mas com uma amostra de maior dimensão):

Group Statistics

	Sexo	N	Mean	Std. Deviation
Altura	Masculino	853	168,46	7,617
	Feminino	1007	158,48	6,652

Supondo a Normalidade das distribuições e assumindo que as variâncias populacionais são desconhecidas e diferentes, verifique se se pode considerar que as alturas médias dos homens e das mulheres são iguais, com 95% de confiança.

a) Suspeita que em média a altura dos homens não é igual à das mulheres. Teste esta hipótese ao nível de significância de 5%.
b) Calcule o valor p associado ao teste da alínea anterior.
c) Teste a hipótese de a média da altura dos homens ser superior à das mulheres, ao nível de significância de 0,5%?
d) Determine o valor p associado ao teste anterior.
e) Ao nível de significância de 2,5%, pode-se afirmar que em média a altura dos homens é superior à das mulheres?
f) A partir de que nível de significância é rejeitada a hipótese do teste anterior?

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a altura dos homens,
- X_2 a v.a. que representa a altura das mulheres,

com $X_1 \sim N(\mu_1 =?\,;\, \sigma_1 =?)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = ?;\, \sigma_2 =?)$, mas $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

$n_1 = 853,\quad \overline{x}_1 = 168{,}46 \quad \text{e} \quad s_1 = 7{,}617,$
$n_2 = 1007,\quad \overline{x}_2 = 158{,}48 \quad \text{e} \quad s_2 = 6{,}652.$

a) $\alpha = 5\%,\ \mu_1 \neq \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 = \mu_2\ vs H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0\ vs\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} t_v, \text{ onde } v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right].$$

$$t_{obs} = \frac{(168{,}46 - 158{,}48) - 0}{\sqrt{\frac{7{,}617^2}{853} + \frac{6{,}652^2}{1007}}} = 29{,}816.$$

$$v = \left[\frac{\left(\frac{7{,}617^2}{853} + \frac{6{,}652^2}{1007}\right)^2}{\frac{1}{853 - 1}\left(\frac{7{,}617^2}{853}\right)^2 + \frac{1}{1007 - 1}\left(\frac{6{,}652^2}{1007}\right)^2} \right] = [1705{,}6] = 1705.$$

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{v;\,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{1705\,;\,0{,}975} = 1{,}96$.

Logo, $R.A.:]-1{,}96;\ 1{,}96[$ e $R.R.:]-\infty;\ -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 5%, existe evidência estatística de existe diferença significativa entre as médias das alturas dos homens e das mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Decisão (pela valor-p):

b) valor $p = 2 \times P(T \geq |t_{obs}|) = 2 \times P(T \geq 29{,}816) = 2 \times \big(1 - P(T < 29{,}816)\big)$
$\approx 2 \times (1 - 1) = 0.$

Logo, aos níveis usuais de significância existe evidência de que a média das alturas dos homens difere das mulheres. Repare-se que o valor p calculado é o valor indicado no quadro de resultados do SPSS anteriormente apresentado.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (c): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Hipóteses:

c) $\alpha = 0{,}5\%, \mu_1 > \mu_2$?

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \text{ (teste unilateral direito).}$$

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \stackrel{\circ}{\sim} t_v, \text{ onde } v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right].$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 29{,}816$ e $v = 1705$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{v;\,1-\alpha} = t_{1705\,;\,0{,}995} = 2{,}576$.
Logo, $R.A.:]-\infty;\ 2{,}576[$ e $R.R.: [2{,}576; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 0,5%, existe evidência estatística de que, em média, os homens são mais altos do que as mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (d): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Decisão (pela valor-p):

d) valor $p = P(T \geq t_{obs}) = P(T \geq 29{,}816\,) = 1 - P(T < 29{,}816\,) \approx 1 - 1 = 0$

Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 168{,}46 - 158{,}48 > 0$ dá uma proposição verdadeira. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} \approx \frac{0}{2} = 0.$$

A hipótese $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância de aproximadamente 0. Assim, para qualquer nível de significância sensato/usual ($\leq 10\%$) existe evidência de que em média os homens são mais altos do que as mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (e): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Hipóteses:

e) $\alpha = 2{,}5\%, \mu_1 < \mu_2$?

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \text{ (teste unilateral esquerdo).}$$

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} t_v, \text{ onde } v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right].$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 29{,}816$ e $v = 1705$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{v;\,1-\alpha} = t_{1705\,;\,0{,}975} = 1{,}96$.
Logo, $R.A.:]-1{,}96; +\infty[$ e $R.R.:]-\infty; -1{,}96]$.

Como $t_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 2,5%, não existe evidência estatística de que, em média, a altura dos homens seja inferior à das mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (f): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Decisão (pela valor-p):

f) valor $p = P(T \leq t_{obs}) = P(T \leq 29{,}816\,) \approx 1.$

Alternativa, com base no $valor\text{-}p$ bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 168{,}46 - 158{,}48 > 0$ dá uma proposição falsa. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} \approx 1 - \frac{0}{2} = 1.$$

A hipótese H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância de aproximadamente 1. Assim, para qualquer nível de significância sensato/usual ($\leq 10\%$) não existe evidência de que em média a altura dos homens seja inferior à das mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

6

Testes de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão
(Amostras Emparelhadas)

Hipóteses do Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Amostras Emparelhadas)

Considere-se agora o caso em que as duas amostras formam um par de observações $(X_{1i};\ X_{2i})$, $i = 1, \dots, n$, ou seja, trata-se de uma amostra emparelhada. Os pares de observações são independentes e retirados de populações Normais, com médias μ_1 e μ_2 e desvios padrão σ_1 e σ_2, respectivamente. Neste caso, para testar a igualdade entre as médias populacionais, as hipóteses a formular são:

T. bilateral	T. unilateral direito	T. unilateral esquerdo
Hipóteses a testar: $H_0: \mu_1 = \mu_2 \ vs\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ $\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \ vs$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	**Hipóteses a testar:** $H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \ vs\ H_1: \mu_1 > \mu_2$ $\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \ vs$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$	**Hipóteses a testar:** $H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \ vs\ H_1: \mu_1 < \mu_2$ $\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \ vs$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

Para realizar o teste pretendido calcular:

- $D_i = X_{1i} - X_{2i}, \qquad i = 1, \dots, n;$
- $\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{1i}}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{2i}}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{n};$
- $S_D^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(D_i - \bar{D})^2}{n-1}.$

Ou seja, está-se perante um teste de hipóteses para a média no caso em que a população segue uma distribuição Normal da qual se desconhece a sua variância. Esta situação já foi descrita nos capítulos anteriores (secção 8.3.2).

Desta forma, as hipóteses a testar podem escritas da seguinte forma:

Hipóteses a testar: $H_0: \mu_D = 0 \ vs\ H_1: \mu_D \neq 0$	**Hipóteses a testar:** $H_0: \mu_D \leq 0 \ vs\ H_1: \mu_D > 0$	**Hipóteses a testar:** $H_0: \mu_D \geq 0 \ vs\ H_1: \mu_D < 0$

Um professor de estatística seleccionou aleatoriamente um grupo de 10 alunos, aprovados na disciplina pelo regime de frequências, tendo registado as suas notas nas frequências:

Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1ª freq.	10	11	9	10	18	15	16	13	11	10
2ª freq.	9	12	12	12	18	14	18	12	13	10

Ao nível de significância de 5% pode afirmar que as notas médias dos alunos na 1ª frequência são superiores às obtidas na 2ª frequência? Assuma a Normalidade das notas.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Amostras Emparelhadas)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a nota do aluno na 1ª frequência,
- X_2 a v.a. que representa a nota do aluno na 2ª frequência,

com $X_1 \sim N(\mu_1 = ?\,; \sigma_1 = ?\,)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = ?; \sigma_2 = ?\,)$.

$\alpha = 1\%, \mu_1 > \mu_2$?

Hipóteses:

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \; vs. H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \; vs. H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

como as amostras são emparelhadas

$$\Leftrightarrow H_0: \mu_D \leq 0 \; vs. H_1: \mu_D > 0 \text{ (teste unilateral direito).}$$

Estatística de teste:

Estatística de Teste:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Amostras Emparelhadas)

Aluno (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1ª freq. (x_{1i})	10	11	9	10	18	15	16	13	11	10
2ª freq. (x_{2i})	9	12	12	12	18	14	18	12	13	10
$d_i = x_{1i} - x_{2i}$	1	-1	-3	-2	0	1	-2	1	-2	0

$n = 10$; $\overline{d} = -0{,}7$ e $s_d = 1{,}4944$.

$$t_{obs} = \frac{-0{,}7 - 0}{\frac{1{,}4944}{\sqrt{10}}} = -1{,}481.$$

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n-1;\,1-\alpha} = t_{9;\,0{,}95} = 1{,}833$. Logo, $R.A.:]-\infty;\ 1{,}833[$ e $R.R.: [1{,}833; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 5%, não existe evidência estatística de que as notas médias obtidas pelos alunos na 1ª frequência sejam superiores às da 2ª frequência.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

7

Testes de Hipóteses para p

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

Teste de Hipóteses para p: Formulário

População de Bernoulli

Proporção	$\dfrac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{\dfrac{\theta(1-\theta)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\dfrac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
Diferença de proporções	$\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\dfrac{\theta_1(1-\theta_1)}{m}+\dfrac{\theta_2(1-\theta_2)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}_1(1-\overline{X}_1)}{m}+\dfrac{\overline{X}_2(1-\overline{X}_2)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
Igualdade de proporções	$\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ onde $\hat{\theta}=\dfrac{m\overline{X}_1+n\overline{X}_2}{m+n}$	

Estimador do Parâmetro p

Teste de Hipóteses

$$\frac{P^*-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} \overset{apr}{\cap} N(0,1)$$

Intervalo de Confiança

$$\left]\overline{P}-z_{0,95}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}};\ \overline{P}+z_{0,95}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right[.$$

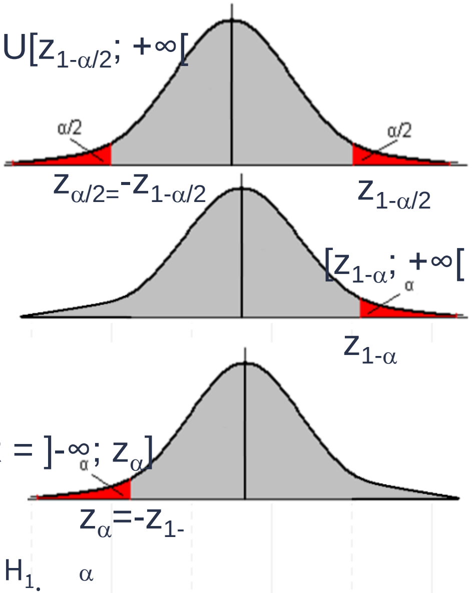
<u>Exercício</u>:
Considere-se uma amostra correspondente a 699 portugueses, sendo 205 fumadores.
Realize um Teste de Hipóteses para testar se a percentagem de fumadores portugueses é diferente de 40% para o nível de significância $\alpha = 1\%$.

Tipos de Testes de Hipóteses para uma Proporção Populacional

Um teste de hipóteses paramétrico para o parâmetro p (proporção populacional) pode ser:

Teste

- Bilateral
  - $H_0: p = p_0$
  - $H_1: p \neq p_0$
  - $RR =]-\infty; -z_{1-\alpha/2}] U [z_{1-\alpha/2}; +\infty[$
- Unilateral
  - à direita
    - $H_0: p \leq p_0$
    - $H_1: p > p_0$
    - $[z_{1-\alpha}; +\infty[$
  - à esquerda
    - $H_0: p \geq p_0$
    - $H_1: p < p_0$
    - $RR =]-\infty; z_\alpha]$



onde p_0 é o valor numérico específico considerado em H_0 e H_1.

Nota: Se $n \times p^* \geq 5$ e $n \times q^* \geq 5$ (corresponde a n grande), então a distribuição da estatística de teste é aproximadamente normal pelo Teorema de Limite Central (TLC).

Teste de Hipóteses para uma Proporção Populacional

$n \times p^* = 204{,}8 \geq 5$ e $n \times q^* = 494{,}2 \geq 5$

Hipóteses

Teste bilateral

H_0: p = 0,4 *versus* H_1: p ≠ 0,4

Dados:
$n = 699 > 30$
$p^* = 205/699$
$p_0 = 0{,}40$
$q_0 = 0{,}60$
$\alpha = 0{,}01$
$z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}995} = 2{,}576$

Tabela da Distribuição Normal

Estatística de teste

$$\frac{P^* - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \overset{apr}{\cap} N(0, 1)$$

Valor observado da estatística de teste (VOE) $z_0 = z_{obs} = -5{,}775$

Região de rejeição ou crítica:
$RR =]-\infty; -z_{0,995}] \cup [z_{0,995}; +\infty[=]-\infty; -2{,}576] \cup [2{,}576; +\infty[$

Regra: $z_0 \in RR \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Tabela da Distribuição Normal

Decisão

Pela região de rejeição: $z_0 = -5{,}775 \in RR =]-\infty; -2{,}576] \cup [2{,}576; +\infty[$

Pelo valor-p: Valor-p $= 2 \times P(Z \geq |-5{,}775|) = 2 \times [1 - P(Z \leq 5{,}775)] \sim 2 \times (1 - 0{,}0005) = 0{,}001 < 0{,}01$

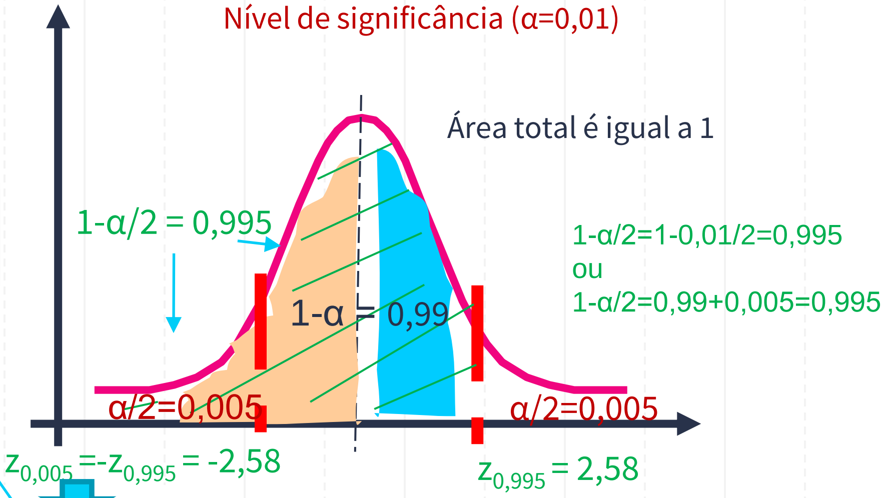
Rejeita-se H_0 para α = 1%. Existe evidência estatística para afirmar que, para α=1%, a proporção de indivíduos na pop. com a característica em estudo é diferente de 40%.

Regra: Valor-p $< \alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Região de rejeição ou crítica:

RR =] $-\infty$; $-z_{0,995}$]U[$z_{0,995}$; $+\infty$[=] $-\infty$; -2,5758]U[2,5758; $+\infty$[

Cálculo do Quantil da Distribuição Normal Padrão de Probabilidade α



O nível de significância é igual a α = 0,01, então tem-se $z_{0,995}$ = 2,58 (ver Tabela)

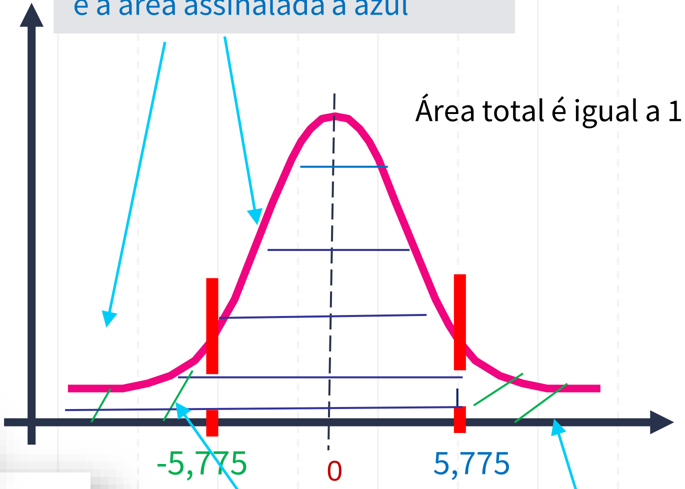
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

Teste bilateral: valor-p = $P(Z \leq -z_0 \text{ ou } Z \geq z_0) = P(Z \leq -z_0) + P(Z \geq z_0) = 2 \times P(Z \geq |z_0|)$

Cálculo do Valor-p quando a Estatística de Teste tem Distribuição Normal Padrão

$P(Z \leq 5{,}775) \sim 0{,}999$
é a área assinalada a azul

valor-p = $P(Z \leq -5{,}775 \text{ ou } Z \geq 5{,}775)$
$= 2 \times P(Z \geq 5{,}775) \sim 2 \times P(Z \geq 3{,}290) = 2 \times 0{,}0005 = 0{,}001$



$P(Z \leq -5{,}775) = 1 - P(Z \leq 5{,}775) = P(Z \geq 5{,}775) \sim 0{,}001$

$z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = \varepsilon\,; \quad z_{\varepsilon/2} : P(|Z| > z_{\varepsilon/2}) = \varepsilon\,.$

ε	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0250	.0500	.1000	.2000	.3000	.4000
z_ε	3.290	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.645	1.282	.842	.524	.253
$z_{\varepsilon/2}$	3.481	3.290	2.807	2.576	2.326	2.241	1.960	1.645	1.282	1.036	.842

8

Testes de Hipóteses para $p_1 - p_2$

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

Teste de Hipóteses para p_1 - p_2: Formulário

População de Bernoulli

Proporção	$\dfrac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{\dfrac{\theta(1-\theta)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0{,}1)$	$\dfrac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0{,}1)$
Diferença de proporções	$\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\dfrac{\theta_1(1-\theta_1)}{m}+\dfrac{\theta_2(1-\theta_2)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0{,}1)$	$\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}_1(1-\overline{X}_1)}{m}+\dfrac{\overline{X}_2(1-\overline{X}_2)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0{,}1)$
Igualdade de proporções	$\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}} \overset{a}{\sim} N(0{,}1)$ onde $\hat{\theta}=\dfrac{m\overline{X}_1+n\overline{X}_2}{m+n}$	

Teste de Hipóteses

$$Z=\frac{(\overline{P}_1-\overline{P}_2)-(p_1-p_2)_0}{\sqrt{\overline{P}^*\left(1-\overline{P}^*\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1), \text{ onde } \overline{P}^*=\frac{n_1\overline{P}_1+n_2\overline{P}_2}{n_1+n_2}.$$

Intervalo de Confiança

Portanto, quando as amostras são grandes, o **I. C. para p_1-p_2 com $100(1-\alpha)\%$ de confiança** é dado por:

$$\left]\overline{P}_1-\overline{P}_2-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1}+\frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}};\ \overline{P}_1-\overline{P}_2+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1}+\frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}\right[.$$

Teste de Hipóteses para $p_1 - p_2$

Considere duas populações Bernoulli, com parâmetros p_1 e p_2 das quais se extraíram aleatoriamente duas amostras independentes de grande dimensão n_1 e n_2, respectivamente. Pretende-se realizar um teste de hipóteses para comparar as duas proporções amostrais p_1 e p_2, i. e., para a diferença de proporções $p_1 - p_2$. Para este teste sabe-se que

$$Z = \frac{\left(\overline{P}_1 - \overline{P}_2\right) - (p_1 - p_2)_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1),$$

onde $(p_1 - p_2)_0$ representa o valor que se assume para $p_1 - p_2$ em H_0.

A expressão apresentada no denominador não é conhecida, apenas se conhecendo o valor da diferença $(p_1 - p_2)$ sob H_0. Como habitualmente este teste é realizado considerando $p_1 - p_2 = 0$, ou seja, $p_1 = p_2 = p$, e como esta proporção é desconhecida é substituída pelo seu estimador consistente. Desta forma, a estatística de teste a utilizar é:

$$Z = \frac{\left(\overline{P}_1 - \overline{P}_2\right) - (p_1 - p_2)_0}{\sqrt{\overline{P}^*\left(1 - \overline{P}^*\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1), \text{ onde } \overline{P}^* = \frac{n_1\overline{P}_1 + n_2\overline{P}_2}{n_1 + n_2}.$$

Realizou-se um estudo em duas cidades, A e B, sobre a percentagem de homens que viam o telejornal todos os dias. Na cidade A inquiriram-se aleatoriamente 150 homens tendo 54 afirmado que viam o telejornal todos os dias ao passo que na cidade B dos 200 inquiridos 80 fizeram tal afirmação.

a) Ao nível de significância de 5%, será de admitir que a proporção de homens que vê o telejornal todos os dias é:
   i. Diferente nas duas cidades?
   ii. Inferior na cidade B?
   iii. Superior na cidade B?
b) Para cada um dos testes anteriores calcule o nível de significância a partir do qual rejeita a hipótese nula.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para $p_1 - p_2$

Sejam:

- X_{1i} a v. a. que designa se o i-ésimo homem, da cidade A, afirmou ver o telejornal, $i = 1, \dots, n_1$,
- X_{2i} a v. a. que designa se o i-ésimo homem, da cidade B, afirmou ver o telejornal, $i = 1, \dots, n_2$,
- $\overline{P}_1$ a v. a. que representa a proporção de homens, da cidade A, que afirmaram ver o telejornal, em n_1 homens,
- $\overline{P}_2$ a v. a. que representa a proporção de homens, da cidade B, que afirmaram ver o telejornal, em n_2 homens.

$$n_1 = 150; \;\; \overline{p}_1 = \frac{54}{150} = 0{,}36; \;\; n_2 = 200 \text{ e } \overline{p}_2 = \frac{80}{200} = 0{,}4.$$

a) $\alpha = 5\%$.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para p_1 - p_2

i) $p_1 \neq p_2$?

Hipóteses:

$H_0: p_1 = p_2 \; vs. \; H_1: p_1 \neq p_2$

$\Leftrightarrow H_0: \; p_1 - p_2 = 0 \; vs \; H_1: \; p_1 - p_2 \neq 0$ (teste bilateral).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\overline{P}_1 - \overline{P}_2) - (p_1 - p_2)_0}{\sqrt{\overline{P}^* \left(1 - \overline{P}^*\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1), \text{ onde } \overline{P}^* = \frac{n_1 \overline{P}_1 + n_2 \overline{P}_2}{n_1 + n_2}.$$

$$\overline{p}^* = \frac{n_1 \overline{p}_1 + n_2 \overline{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{150 \times 0{,}36 + 200 \times 0{,}4}{150 + 200} = 0{,}3829,$$

$$z_{obs} = \frac{(0{,}36 - 0{,}4) - 0}{\sqrt{0{,}3829(1 - 0{,}3829)\left(\frac{1}{150} + \frac{1}{200}\right)}} = -0{,}7619.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Pela tabela $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975} = 1{,}96$.

Logo, $R.A.:]-1{,}96; \; 1{,}96[$ e $R.R.:]-\infty; \; -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty[$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 5%, não existe evidência estatística de que a proporção de homens que afirmam ver o telejornal todos os dias é significativamente diferente nas duas cidades.

Exercício (a) (ii): Teste de Hipóteses para $p_1 - p_2$

ii) $p_1 > p_2$?

Hipóteses:

$H_0: p_1 \leq p_2 \; vs. H_1: p_1 > p_2$

$\Leftrightarrow H_0: p_1 - p_2 \leq 0 \; vs \; H_1: p_1 - p_2 > 0$ (teste unilateral direito).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\overline{P}_1 - \overline{P}_2) - (p_1 - p_2)_0}{\sqrt{\overline{P}^* \left(1 - \overline{P}^*\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1), \text{ onde } \overline{P}^* = \frac{n_1 \overline{P}_1 + n_2 \overline{P}_2}{n_1 + n_2}.$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $z_{obs} = -0{,}7619$.

Pela tabela $z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1{,}645$. Logo, $R.A.:]-\infty; \; 1{,}645[$ e $R.R.: [1{,}645; +\infty[$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 5%, não existe evidência estatística de que a proporção de homens que afirmam ver o telejornal todos os dias seja significativamente inferior na cidade B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (iii): Teste de Hipóteses para $p_1 - p_2$

iii) $p_1 < p_2$?

Hipóteses:

$H_0: p_1 \geq p_2 \; vs. H_1: p_1 < p_2$
$\Leftrightarrow H_0: p_1 - p_2 \geq 0 \; vs \; H_1: p_1 - p_2 < 0$ (teste unilateral esquerdo).

Estatística de teste:

Estatística de Teste:

$$Z = \frac{(\overline{P}_1 - \overline{P}_2) - (p_1 - p_2)_0}{\sqrt{\overline{P}^*\left(1 - \overline{P}^*\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1), \text{ onde } \overline{P}^* = \frac{n_1\overline{P}_1 + n_2\overline{P}_2}{n_1 + n_2}.$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $z_{obs} = -0{,}7619$.

Pela tabela $z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1{,}645$. Logo, $R.A.:]-1{,}645; +\infty[$ e $R.R.:]-\infty; -1{,}645]$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 5%, não existe evidência estatística de que a proporção de homens que afirmam ver o telejornal todos os dias seja significativamente superior na cidade B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b): Teste de Hipóteses para p_1 - p_2

Decisão (pela valor-p):

b) i) valor $p = 2 \times P(Z \geq |z_{obs}|) = 2 \times P(Z \geq 0{,}7619) = 2 \times \left(1 - \Phi(0{,}7619)\right)$
$= 2 \times (1 - 0{,}7769) = 0{,}4461.$

A hipótese $H_0: p_1 - p_2 = 0$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 44,61%, logo não existe evidência de que as proporções sejam diferentes, para qualquer nível se significância usual (1%, 5%, 10%).

ii) valor $p = P(Z \geq z_{obs}) = P(Z \geq -0{,}7619) = 1 - \Phi(-0{,}7619) = \Phi(0{,}7619) = 0{,}7769.$
Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 p_1 e p_2 por $\overline{p}_1$ e $\overline{p}_2$, respectivamente, $\overline{p}_1 - \overline{p}_2 = 0{,}36 - 0{,}4 < 0$ dá uma proposição falsa. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = 1 - \frac{0{,}4461}{2} = 0{,}7769.$$

A hipótese $H_0: p_1 - p_2 \leq 0$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 77,69%. logo não existe evidência de que a proporção na cidade A seja superior à verificada na cidade B.

iii) valor $p = P(Z \leq z_{obs}) = P(Z \leq -0{,}7619) = \Phi(-0{,}7619) = 1 - \Phi(0{,}7619)$
$= 1 - 0{,}7769 = 0{,}2231.$
Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 p_1 e p_2 por $\overline{p}_1$ e $\overline{p}_2$, respectivamente, $\overline{p}_1 - \overline{p}_2 = 0{,}36 - 0{,}4 < 0$ dá uma proposição verdadeira. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = \frac{0{,}4461}{2} = 0{,}2231.$$

A hipótese $H_0: p_1 - p_2 \geq 0$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 22,31%, logo não existe evidência de que a proporção na cidade A seja inferior à verificada na cidade B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

9

Testes de Hipóteses para σ^2

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

Teste de Hipóteses para σ^2: Formulário

Variância corrigida

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$ $T = \dfrac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	$Z = \dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r = \dfrac{\left(\dfrac{s_1'^2}{m}+\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\left(\dfrac{s_1'^2}{m}\right)^2+\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
Variância	$\dfrac{nS^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\dfrac{S_1'^2}{S_2'^2}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

<u>Exercício</u>:

Considere-se uma amostra de dimensão $n = 9$ e variância $s^2 = 100$. Realize um Teste de Hipóteses para testar se o desvio padrão populacional é superior a 4 para o nível de significância $\alpha = 1\%$.

Exercício: Teste de Hipóteses para σ^2

Hipóteses:

Passo 0
+
Passo 1

$X \sim Nor(\mu, \sigma^2)$ $\quad n = 9 \quad s^2 = 100$

$H_0: \sigma = 4$

$H_1: \sigma > 4$

$\alpha = 1\%$

$E(X) = \mu$

$Var(X) = \sigma^2$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício: Teste de Hipóteses para σ^2

Estatística de Teste:

(2) p/ σ^2

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

Passo 2

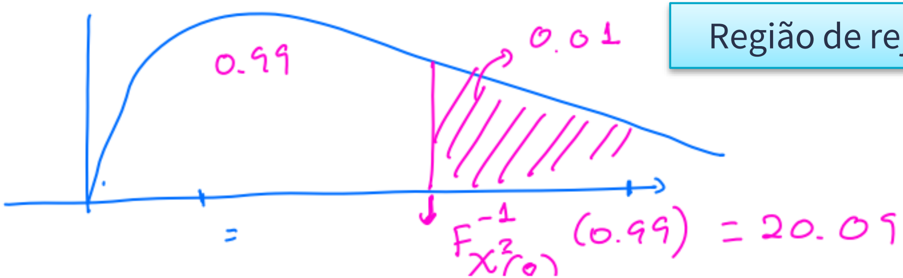
v. aleat. $T = \frac{8\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(8)}$ $\cancel{\frac{6 \times 25}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(6)}}$

est. teste $T_0 = \frac{8\,S^2}{16}$

valor observado $t_0 = \frac{8 \times 100}{16} = 50$

Exercício: Teste de Hipóteses para σ^2

Decisão (pela região de rejeição):



Região de rejeição RR = [20,09; +∞[

Como $t_0 = 50 > 20.09$, então H_0 deve ser rejeitada para $\alpha = 1\%$.

para $\alpha \geq 1\%$

Decisão:

Rejeita-se H0 para α = 1%.

Existe evidência estatística para afirmar que o desvio padrão populacional é superior a 4 para α = 1%.

Cálculo dos Quantis da Distribuição Qui-Quadrado de Probabilidade 1-α e com n-1 g.l.´s

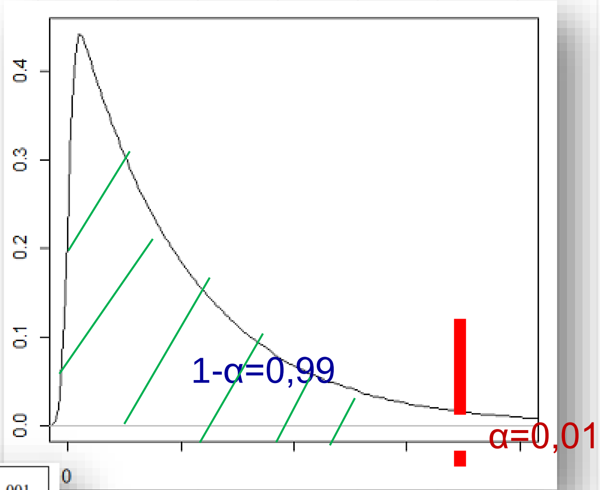
Nível de confiança (1-α=0,99)

Nível de significância (α=0,01)

Área total é igual a 1

O nível de significância é α = 0,01

Logo, pretende-se calcular o quantil da distribuição Qui-Quadrado de probabilidade 1-α = 0,99
$\chi^2_{0,99;8}$ = 20,09 (ver tabela)



$\chi^2_{0,99;8}$ = 20,09

$$\chi^2_{n,\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

Regra de decisão pelo valor-p:
Valor-p = $P(X^2 \geq VOE) < \alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0 para α

Cálculo do Valor-p quando a Estatística de Teste tem Distribuição Qui-Quadrado

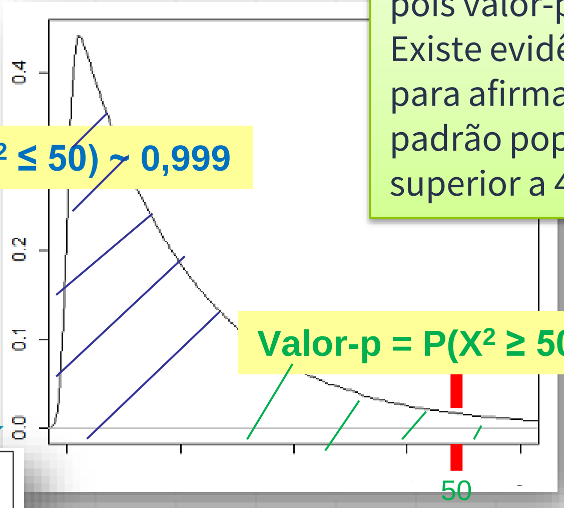
Decisão (pelo valor-p):

valor-p = $P(X^2 \geq 50) \sim P(X^2 \geq 26{,}124) = 0{,}001$
(ver a tabela)

$$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

Área total é igual a 1



$P(X^2 \leq 50) \sim 0{,}999$

Valor-p = $P(X^2 \geq 50) \sim 0{,}001$

Decisão:
Rejeita-se H0 para $\alpha = 1\%$, pois valor-p ~ 0,001 < 0,01. Existe evidência estatística para afirmar que o desvio padrão populacional é superior a 4 para $\alpha = 1\%$.

10

Testes de Hipóteses para σ_1^2/σ_2^2

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

Teste de Hipóteses para σ_1^2/σ_2^2: Formulário

Variância corrigida

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\frac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m}+\frac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r = \frac{\left(\frac{s_1'^2}{m}+\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\left(\frac{s_1'^2}{m}\right)^2+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
	$T = \frac{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	
Variância	$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

Teste de Hipóteses para σ_1^2/σ_2^2

Considere que duas populações Normais, com médias μ_1 e μ_2 e desvios padrão σ_1 e σ_2, das quais se extraíram aleatoriamente duas amostras independentes com dimensão n_1 e n_2, respectivamente. Pretende-se realizar um teste de hipóteses para comparar as variâncias populacionais σ_1^2 e σ_2^2, i. e., para o quociente de variâncias (σ_2^2/σ_1^2). A estatística de teste a utilizar é:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)_0 \sim F_{n_1-1;\, n_2-1},$$

onde $(\sigma_2^2/\sigma_1^2)_0$ representa o valor que se assume para (σ_2^2/σ_1^2) em H_0.

Teste de Hipóteses para σ_1^2/σ_2^2

Nesta secção considera-se apenas a situação em que $(\sigma_2^2/\sigma_1^2)_0 = 1$, o que equivale a comparar a igualdade das variâncias populacionais.

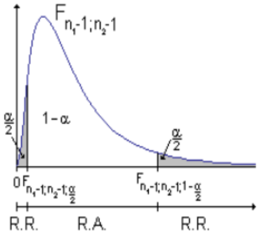
T. bilateral

Hipóteses a testar:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \; vs \; H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \Leftrightarrow$$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \; vs \; H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

Regiões críticas:



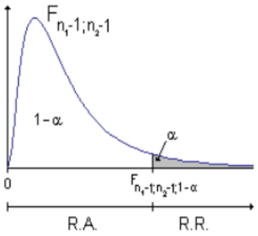
T. unilateral direito

Hipóteses a testar:

$$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_0^2 \; vs: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \Leftrightarrow$$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1 \; vs \; H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

Regiões críticas:



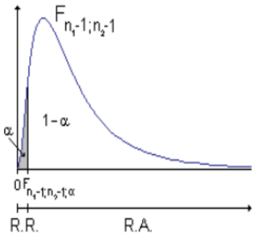
T. unilateral esquerdo

Hipóteses a testar:

$$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \; vs \; H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \Leftrightarrow$$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1 \; vs \; H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$$

Regiões críticas:



Nos primeiros 6 meses de vida dois grupos aleatórios de crianças seguiram esquemas de alimentação diferentes: o grupo 1 seguiu o esquema A e o grupo 2 seguiu o esquema B. No quadro seguinte apresentam-se os ganhos em peso, em kg, dessas crianças.

Grupo 1	2,7	3,2	3,6	4,1	2,7	3,2	4,5	3,6	2,7
Grupo 2	4,1	4,5	3,6	2,7	3,6	3,2	4,1		

Sabe-se que as crianças dos dois grupos tinham, ao nascer, aproximadamente pesos iguais.
Admita que as distribuições dos pesos seguem a distribuição Normal.

a) Com base num teste de hipóteses, ao nível de significância de 5%, pode concluir que a variabilidade é igual nos dois grupos?

b) Sem efectuar cálculos diga, justificando, qual a decisão que tomava no âmbito da alínea b), se considerasse um nível de significância de 1%?

c) Para o teste da alínea a) calcule o respectivo valor p e interprete.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa o ganho em peso, em kg, das crianças alimentadas segundo o esquema A,
- X_2 a v.a. que representa o ganho em peso, em kg, das crianças alimentadas segundo o esquema B,

Com $X_1 \sim N(\mu_1 = ?\,; \sigma_1 = ?)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = ?; \sigma_2 = ?)$.

$n_1 = 9, \quad \bar{x}_1 = 3{,}3667 \quad \text{e} \quad s_1^2 = 0{,}4150,$

$n_2 = 7, \quad \bar{x}_2 = 3{,}6857 \quad \text{e} \quad s_2^2 = 0{,}3714.$

a) $\alpha = 5\%, \sigma_1^2 = \sigma_2^2?$

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \ vs \ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$\Leftrightarrow H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \ vs \ H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ (teste bilateral).

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a)

Estatística de teste:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)_0 \sim F_{n_1-1;\, n_2-1=8;\, 6}.$$

$$f_{obs} = \frac{0{,}4150}{0{,}3714} \times 1 = 1{,}1173.$$

Pela tabela, $f_{n_1-1;\, n_2-1;\, \frac{\alpha}{2}} = f_{8;\, 6;\, 0{,}25} = \dfrac{1}{f_{6;\, 8;\, 0{,}975}} = \dfrac{1}{4{,}65} = 0{,}215$ e $f_{n_1-1;\, n_2-1;\, 1-\frac{\alpha}{2}} = f_{8;\, 6;\, 0{,}975} = 5{,}6.$

Logo, $R.A.$: $]0{,}215;\ 5{,}6[$ e $R.R.: [0;\ 0{,}215] \cup [5{,}6; +\infty[$

Como $f_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 5%, não existe evidência estatística de que a variabilidade nos pesos seja significativamente diferente nos dois grupos.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercícios (b) e (c)

b) Se $\alpha = 1\%$ a decisão tomada no teste anterior era a mesma, ou seja, não rejeitar H_0. Esta situação é originada pelo facto de quando se diminui o nível de significância também se diminui a $R.R.$ e consequentemente a $R.A.$ aumenta. Portanto, se quando $\alpha = 5\%$ f_{obs} está na $R.A.$ então $\alpha = 1\%$ a situação mantém-se.

c) valor $p = 2 \times min\{P(F \leq f_{obs}); P(F \geq f_{obs})\}$

$$= 2 \times min\{P(F \leq 1{,}1173); P(F \geq 1{,}1173)\}$$
$$= 2 \times min\{0{,}5409; 0{,}4591\}$$
$$= 2 \times 0{,}4591 = 0{,}9181.$$

A hipótese $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 91,81%, indicando que não existe evidência de que as variâncias sejam diferentes.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Obrigada!

Questões?